EGZAMIN, TOPOLOGIA I - TEORIA, 08.02.24

UWAGA: Nie ma potrzeby pisania każdego dowodu/definicji na oddzielnej kartce. Każdą kartkę z rozwiązaniami podpisujemy podając: imię i nazwisko, numer indeksu, numer grupy ćwiczeniowej i nazwisko prowadzącego.

I. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną.

a). Podaj definicję topologii $\mathcal{T}(d)$ generowanej w przestrzeni X przez metrykę d.

b). Podaj przykład przestrzeni topologicznej $(Y, \mathcal{T}_Y)$, dla której nie istnieje metryka d na zbiorze Y taka, że $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}(d)$. Odpowiedź uzasadnij.

c). Udowodnij, że jeśli (X, d) jest przestrzenią metryczną, $A \subset X$ jest podzbiorem domkniętym w X oraz $p \in (X \setminus A)$ to istnieją zbiory $U, V \in \mathcal{T}(d)$ takie, że $A \subset U$, $p \in V$ oraz $U \cap V = \emptyset$.

II. Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną.

a). Podaj definicję zwartości przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$.

b). Załóżmy, że $(X, \mathcal{T})$ jest przestrzenią dyskretną. Uzasadnij, że $(X, \mathcal{T})$ jest zwarta wtedy i tylko wtedy gdy jej moc jest skończona.

c). Udowodnij, że domknięty podzbiór przestrzeni zwartej jest zwarty.

III. Niech $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ będą przestrzeniami topologicznymi.

a). Podaj definicję ściągalności przestrzeni $(X, \mathcal{T}_X)$.

b). Uzasadnij, że podzbiór płaszczyzny euklidesowej $X = R^2 \setminus \{(0,0)\}$ nie jest przestrzenią ściągalną.

c). Udowodnij, że jeśli X jest przestrzenią ściągalną a Y jest łukowo spójna to zbiór klas homotopii odwzorowań $X \to Y$ jest jednoelementowy.

EGZAMIN, TOPOLOGIA I, 08.02.24.

UWAGA: Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na oddzielnej kartce. Każdą kartkę z rozwiązaniami należy podpisać podając imię i nazwisko, numer indeksu oraz numer grupy lub nazwisko prowadzącego ćwiczenia. **Dla wszystkich odpowiedzi należy podać uzasadnienie.**

1. Dla punktów p, q płaszczyzny euklidesowej R^2 i liczby rzeczywistej r niech $I(p,q)$ oznacza odcinek domkniety łączący punkty p i q a $O(p,r)$ oznacza okrąg o środku w p i promieniu r. Niech X będzie podzbiorem przestrzeni euklidesowej R^2 zdefiniowanym jako

$$X = O((1,0),1) \cup I((-3,0),(-2,0)) \cup \bigcup_{n\in N} O((0,0), 2+1/n)$$

gdzie $N = \{1,2,..\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych.

(A.) Udowodnij, że X jest zbiorem spójnym.

(B.) Udowodnij, że X nie jest zbiorem łukowo spójnym.

2. Niech d_k będzie metryką kolejową, a d_r metryką rzeka. Rozważmy zbiór

$$X = \bigcup_{q\in Q\cap(0,1)} \{(x,y) \in R^2 \mid y = qx, x \in (0,1)\}.$$

(A.) Sprawdź, czy przestrzeń (X, d_k) jest przestrzenią zupełną. Jeśli (X, d_k) nie jest zupełna to sprawdź czy jest przestrzenią metryzowalną w sposób zupełny.

(B.) Sprawdź, czy przestrzeń (X, d_r) jest przestrzenią zupełną. Jeśli (X, d_r) nie jest zupełna to sprawdź czy jest przestrzenią metryzowalną w sposób zupełny.

3. Niech $f : R \setminus Q \to Q$ będzie funkcją ciągłą (w dziedzinie i przeciwdziedzinie funkcji mamy topologię indukowaną z topologii euklidesowej na prostej R). Wykaż, że istnieje niepusty przedział $(a,b) \subset R$ taki, że f jest stała na zbiorze $(a,b) \setminus Q$.

4. Niech $X = [0,5] \subset R$ będzie podzbiorem prostej z topologią euklidesową. Zdefiniujmy dwa podzbiory w X:

$$A = (0,2] \qquad i \qquad B = [1,2] \cup [3,4].$$

a. Sprawdź, czy przestrzeń ilorazowa X/A jest przestrzenią Hausdorff'a.

b. Sprawdź, czy przestrzenie X/A i X/B są łukowo spójne.

c. Udowodnij, że przestrzeń ilorazowa X/B nie jest przestrzenią ściągalną.